

Correction de la serie : 9 d'exercices

PARTIE2 : Equation du second degré à une inconnue

Exercice1 : Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$1) x^2 = 16 \quad 2) x^2 = -8 \quad 3) (x+2)^2 = 9 \quad 4) 5x^2 - 4x = 0 \quad 5) 3x^2 - x - 2 = 0$$

Solution : 1) L'équation $x^2 = 16$.

16 est positif donc l'équation admet deux solutions $x = \sqrt{16} = 4$ et $x = -\sqrt{16} = -4$.

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S = \{-4; 4\}$

2) L'équation $x^2 = -8$.

-8 est négatif donc l'équation n'a pas de solution

Dans \mathbb{R} . Donc : $S = \emptyset$

3) L'équation $(x+2)^2 = 9$. on a alors $x+2 = 3$ ou $x+2 = -3$.

L'équation admet deux solutions $x = 3 - 2 = 1$ et $x = -3 - 2 = -5$.

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S = \{-5; 1\}$

4) $5x^2 - 4x = 0$ ssi $x(5x - 4) = 0$

Soit : $x = 0$ ou $5x - 4 = 0$

Soit : $x = 0$ ou $x = \frac{4}{5}$ Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S = \left\{0; \frac{4}{5}\right\}$

5) $3x^2 - x - 2 = 0$ On va d'abord Factoriser les trinômes $3x^2 - x - 2$

$$3x^2 - x - 2 = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) = 3\left(x^2 - 2\frac{1}{2 \times 3}x + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{2}{3}\right)$$

$$3x^2 - x - 2 = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) = 3\left(\left(x - \left(\frac{1}{6}\right)\right)^2 - \frac{25}{36}\right)$$

$$3x^2 - x - 2 = 3\left(\left(x - \left(\frac{1}{6}\right)\right)^2 - \frac{25}{36}\right) \quad \text{Cette écriture s'appelle la forme canonique}$$

$$3x^2 - x - 2 = 3\left(x - \frac{1}{6} - \frac{5}{6}\right)\left(x - \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right) = 3(x-1)\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

Donc : $3x^2 - x - 2 = 3(x-1)\left(x + \frac{2}{3}\right)$ la forme factorisée

$$3x^2 - x - 2 = 0 \quad \text{ssi} \quad (x-1)\left(x + \frac{2}{3}\right) = 0 \quad \text{On a alors } x-1=0 \text{ ou } x + \frac{2}{3} = 0$$

L'équation admet deux solutions $x=1$ et $x = -\frac{2}{3}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S = \left\{-\frac{2}{3}; 1\right\}$

Exercice2 : Calculer le discriminant du trinôme $3x^2 - x - 2$

Solution : Calculons le discriminant : $a = 3$, $b = -1$ et $c = -2$ donc :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 1 + 24 = 25$$

Exercice3 : Résoudre les équations suivantes et Factoriser les trinômes :

a) $2x^2 - x - 6 = 0$ b) $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$ c) $x^2 + 3x + 10 = 0$ d) $6x^2 - x - 1 = 0$

Solution : a) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$:

$a = 2$, $b = -1$ et $c = -6$ donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2 \times 2} = -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{49}}{2 \times 2} = 2$$

Donc : $S = \left\{ -\frac{3}{2}; 2 \right\}$ et le trinôme $2x^2 - x - 6$ a une forme factorisée :

$$2x^2 - x - 6 = a \left(x - \left(-\frac{3}{2} \right) \right) (x - 2) \quad \text{c a d :} \quad 2x^2 - x - 6 = a \left(x + \frac{3}{2} \right) (x - 2)$$

b) Calculons le discriminant de l'équation : $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$: $a = 2$, $b = -3$ et $c = \frac{9}{8}$

donc : $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} = 0$.

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$

c a d : $S = \left\{ \frac{3}{4} \right\}$ et le trinôme $2x^2 - 3x + \frac{9}{8}$ a une forme factorisée : $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 2 \left(x - \frac{3}{4} \right)^2$

c) Calculons le discriminant de l'équation $x^2 + 3x + 10 = 0$: $a = 1$, $b = 3$ et $c = 10$

donc ; $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle cad : $S = \emptyset$

d) $6x^2 - x - 1 = 0$ $\Delta = 1 + 24 = 25$

$$x_1 = \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1-5}{12} = -\frac{1}{3} \quad \text{Donc :} \quad S = \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right\}$$

$$\text{Et} \quad R(x) = 6 \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x + \frac{1}{3} \right)$$

Exercice 4: Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1) $6x^2 - 7x - 5 = 0$ 2) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ 3) $3x^2 + x + 2 = 0$ 4) $4x^2 - 8x + 3 = 0$

5) $x^2 - 4x + 2 = 0$ 6) $x^2 + 5x + 7 = 0$ 7) $2x^2 - 4x + 6 = 0$ 8) $x^2 - 4x - 21 = 0$

9) $3x^2 - 6x + 3 = 0$

Solution : 1) $6x^2 - 7x - 5 = 0$ $a = 6$ et $b = -7$ et $c = -5$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 6 \times (-5) = 49 + 120 = 169 = (13)^2 > 0$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-7) + \sqrt{169}}{2 \times 6} = \frac{7+13}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{7-13}{12} = \frac{6}{12} = -\frac{1}{2} \quad \text{Donc :} \quad S = \left\{ \frac{5}{3}, -\frac{1}{2} \right\}$$

$$2) 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \quad a = 2 ; b = -2\sqrt{2} ; c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{2})^2 - 4 \times 2 \times 1 = 8 - 8 = 0$$

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (dite double):

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2\sqrt{2})}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{Donc : } S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

$$3) 3x^2 + x + 2 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1 - 24 = -23 < 0$$

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle cad : $S = \emptyset$

$$4) 4x^2 - 8x + 3 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 3 \times (4) = 64 - 48 = 16 = (4)^2 > 0$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-8) + \sqrt{16}}{2 \times 4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-8) - \sqrt{16}}{2 \times 4}$$

$$x_1 = \frac{8+4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{8-4}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{donc : } S = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

$$5) x^2 - 4x + 2 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (1) = 16 - 8 = 8 > 0$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{8}}{2 \times 1} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{8}}{2 \times 1}$$

$$\text{Donc : } x_1 = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(2 + \sqrt{2})}{2} = 2 + \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(2 - \sqrt{2})}{2} = 2 - \sqrt{2}$$

$$\text{Donc : } S = \{2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}$$

$$6) x^2 + 5x + 7 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 1 \times 7 = 25 - 28 = -3 < 0$$

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle cad : $S = \emptyset$

$$7) 2x^2 - 4x + 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 16 - 48 = -32 < 0$$

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle cad : $S = \emptyset$

$$8) x^2 - 4x - 21 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-21) = 16 + 84 = 100 = (10)^2 > 0$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{100}}{2 \times 1} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{100}}{2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{4+10}{2} = \frac{14}{2} = 7 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4-10}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \quad \text{Donc : } S = \{-3, 7\}$$

$$9) \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 36 - 36 = 0$$

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (dite double):

$$x = \frac{-(-6)}{2 \times 3} = \frac{6}{6} = 1 \quad S = \{1\}$$

Exercice5 : Factoriser les trinômes :

$$a) \quad 4x^2 + 19x - 5 \quad b) \quad 9x^2 - 6x + 1$$

Solution : a) On cherche les racines du trinôme $4x^2 + 19x - 5$:

$$\text{Calcul du discriminant : } \Delta = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 441$$

$$\text{Les racines sont : } x_1 = \frac{-19 - \sqrt{441}}{2 \times 4} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-19 + \sqrt{441}}{2 \times 4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{On a donc : } 4x^2 + 19x - 5 = 4(x - (-5)) \left(x - \frac{1}{4}\right) = (x + 5)(4x - 1).$$

b) On cherche les racines du trinôme $9x^2 - 6x + 1$:

$$\text{Calcul du discriminant : } \Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0$$

Comme $\Delta = 0$, le trinôme possède une seule racine (dite racine double): $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \times 9} = \frac{1}{3}$:

$$\text{et le trinôme } 9x^2 - 6x + 1 \text{ a une forme factorisée : } 9x^2 - 6x + 1 = 9 \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$$

Exercice6 : Avec 60 dh j'ai acheté un nombre de jouets identique. (Ont donc le même prix)

Si chaque jouet avait coûté 1dh de moins ; j'aurais pu en acheter 3 de plus .

Combien en ai-je acheté ?

Solution : Soit n le nombre de jouets achetés

Et soit p le prix d'un jouet en dh

$$\text{Nous avons donc : } 60 = np \quad \text{et} \quad 60 = (n-1)(p+3)$$

$$\text{Nous déduisons donc l'équation : } n^2 + 3n - 180 = 0$$

$$\text{Calcul du discriminant: } \Delta = 729 > 0 \quad \text{Les solutions sont : } n_1 = \frac{-3 + \sqrt{729}}{2 \times 1} = 12 \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{-3 - \sqrt{729}}{2 \times 1} = -15$$

Nous rejetons $n_2 = -15$ car le prix est positif

Donc : j'ai acheté 12 jouets.

Exercice7 : La somme des carrés de trois nombres entiers naturels consécutifs vaut 3470.

Quel est le premier de ces nombres?

Solution : Appelons x le premier de ces trois nombres. x vérifie l'équation :

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 3470$$

$$\text{Donc : } x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 3470$$

$$\text{Donc : } 3x^2 + 6x + 5 = 3470$$

C'est-à-dire : $3x^2 + 6x - 3465 = 0$

Calculons: $\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-3465) = 36 + 41580 = 41616$

Les deux valeurs possibles pour x sont :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{41616}}{2 \times 3} = \frac{-6 - 204}{6} = \frac{-210}{6} = -35$$

$$\text{Et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{41616}}{2 \times 3} = \frac{-6 + 204}{6} = 33$$

Comme x est un entier naturel x est positif le premier des trois nombres est 33.